

Součinitel tření při proudění tekutin – komparace vztahů

Coefficient of friction under fluid flow – comparison of relations

Prof. Ing. Karel HEMZAL, CSc.
ČVUT, Fakulta strojní v Praze,
Ústav techniky prostředí

Při dimenzování potrubních sítí je nejčastěji potřebné stanovit součinitel třecích ztrát λ a to pro každý úsek třeba i vícekrát. V rozvodech vody a vzduchu zařízení techniky prostředí je proudění v oblasti přechodné, kde tento součinitel λ závisí na Reynoldsově čísle a poměrné drsnosti. Za nejpřesnější je považován implicitní vztah Colebrookův-Whiteův, který vyžaduje iterační postup. Pro technickou praxi byla proto navržena řada přibližných vztahů, které však udávají výsledky často značně rozdílné. Příspěvek přináší kritické porovnání součinitele λ , založený na stanovení odchylek od Colebrookova-Whiteova vztahu a doporučení vztahu pro explicitní stanovení λ .

Klíčová slova: proudění tekutin, tlakové ztráty třením, součinitel třecích ztrát, potrubí

Recenzent
Ing. Zdeněk Lerl

For design of pipe and duct dimension is most frequently used friction factor – for each section more times. Inside water pipes and air ducts HVAC installation are flow conditions in transition field, where friction factors are presented in terms of Reynolds number and relative roughness. As most accurate is used implicit Colebrook-White equation, for its solution is necessary iterative procedure. For technical application has been adopted number of easier to use equations, which results are many times very different. The contribution deals with critical comparison of the f -factor based on calculation of deviation from Colebrook-White equation and provide explicit equation for explicit calculation of friction factor.

Key words: fluid flow, friction pressure losses, friction factor, duct

Vnitřní struktura proudění vody a vzduchu – nejčastěji používaných tekutin v technice prostředí – je v drtivé většině aplikací turbulentní [1]. Rozsah proudění vzduchu ve vzduchotechnických rozvodech je vymezen průměry 50 až 2 500 mm, rychlostmi 0,5 až 25 m/s. Při běžných drsnostech je v tomto rozsahu proudění vždy v přechodné turbulentní oblasti proudění, kde součinitel třecích ztrát $\lambda = f(\text{Re}, \varepsilon/d)$, je zde závislý jak na velikosti Reynoldsova čísla $\text{Re} = w \cdot d/\nu$ tak poměrné drsnosti ε/d . Také proudění vody v rozvodech o průměru 10 až 100 mm při rychlostech 0,1 až 2 m/s a běžné drsnosti je v této oblasti. Turbulentní přechodná oblast je vymezena prouděním v potrubí s hladkými stěnami, kde $\varepsilon \equiv 0$ a oblastí, kde $\lambda = f(\varepsilon/d)$ tedy nezávislý na Re (tzv. kvadratická oblast).

Za nejpřesnější se považuje historicky první analytické vyjádření této závislosti Colebrook-Whiteovým vztahem (1939 [9]), který aproximoval výsledky experimentů s umělé zdrsňeným povrchem trub pískem (Nikuradze) na trouby s drsností danou výrobním postupem, které podrobil Colebrook vlastnímu zkoumání. Bohužel tento vztah udává součinitel tření implicitně

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left[\frac{\varepsilon/d}{3,71} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right] \quad (1)$$

a vyjádření λ je možné jen iterací. Protože výpočet při dimenzování sítí je nutně opakovat nejméně tolikrát, kolik má distribuční síť úseků, byl výpočet v době před hromadným rozšířením osobních počítačů prakticky nemožný. Obdobně složitý je vztah, uváděný v [2], který je úpravou vztahu (1)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 + 2 \cdot \log(d/\varepsilon) - 2 \cdot \log \left[1 + \frac{9,3}{\text{Re}(\varepsilon/d)\sqrt{\lambda}} \right] \quad (1a)$$

Proto byly k praktickým výpočtům navrženy zjednodušené vztahy, které umožnily výpočet součinitele tření explicitně, většinou však s omezeným rozsahem platnosti a pouze přibližně.

Pro svoji jednoduchost však našly nejširší uplatnění, mají však jednu velkou nevlastnost: pokud jejich použití vybočí z mezí dané platnosti (s definovanou – většinou širší – nepřesností) pak mohou být odchylky od nejpřesnějšího vztahu značné. Od sedmdesátých let minulého století existuje řada explicitních vztahů

exponenciálního typu, které však nejsou standardizovány. Předložená práce předkládá výsledky porovnání těchto vztahů se standardním (1) na základě rozboru odchylek ve vymezeném rozsahu a navrhuje nejlépe vyhovující vztah.

K porovnání byly použity rovnice Kagana [7], která vznikla počítačovým zpracováním experimentů Colebrooka a Murina [11],

$$\lambda = \frac{0,28}{\left[\log \frac{5,5 \cdot d}{\varepsilon + 55 \cdot d / \text{Re}} \right]^2} \quad (2)$$

a vztah podle Swameeho [4]

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3,7 \cdot d} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right) \right]^2} \text{ resp. } \lambda = \frac{1,325}{\left[\ln \left(\frac{\varepsilon}{3,7 \cdot d} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (3)$$

Tyto typy vztahů jsou pro konstrukci nomogramů (které jsou grafickým vyjádřením analytických závislostí) stále příliš složité. Většina našich nomogramů tlakového spádu [1], [6] ve vzduchovodech je konstruována podle vztahu, který předložil Smolík (1959) [4]

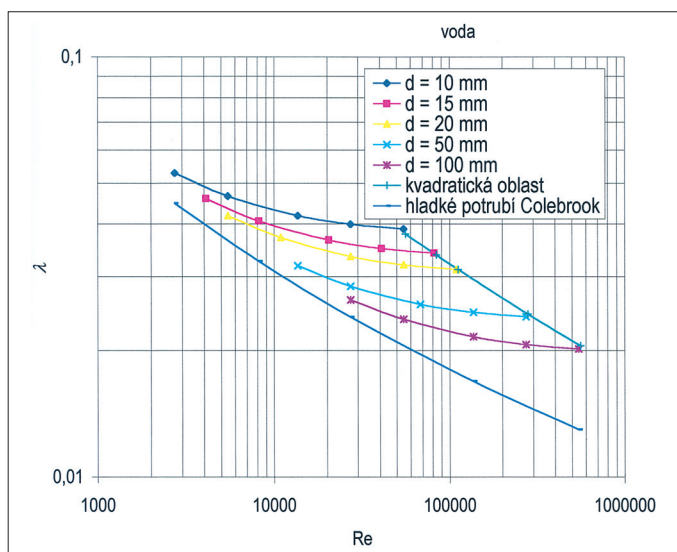
$$\lambda = \frac{0,0812}{\text{Re}^{0,125} \cdot d^{0,11}} \quad (4)$$

s předpokládanou drsností $\varepsilon = 0,15$ mm. Tento vztah aproximuje křivkový průběh závislosti (v logaritmických souřadnicích) přímkovým s odchylkami do $\pm 8,5\%$.

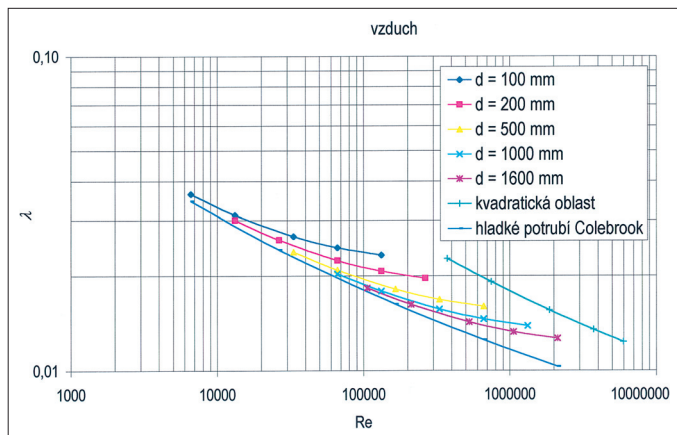
Velmi oblíbený vztah (rovněž přímkový) navrhnul Blasius (1911)

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \quad (5)$$

který je však platný jen pro hladké stěny a pouze v rozsahu $5\,000 < \text{Re} < 80\,000$, nebo vztah



Obr. 1 Průběhy závislosti součinitele třecích ztrát na Re a ϵ/d ve vodních rozvodech ($\epsilon = 0,1 \text{ mm}$, $80 \text{ }^\circ\text{C}$)



Obr. 2 Průběhy závislosti součinitele třecích ztrát na Re a ϵ/d ve vzduchovodech ($\epsilon = 0,15 \text{ mm}$, $20 \text{ }^\circ\text{C}$)

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{\text{Re}^{0,237}} \quad \text{pro } 10^5 < \text{Re} < 3 \cdot 10^6 \quad (6)$$

Jak je zřejmé z obr. 1 a 2, proudění ve vodních a ve vzduchových rozvodech je od představy hladkých stěn většinou značně vzdálené. Plně kvadratická oblast nastává (podle Moodyho) při

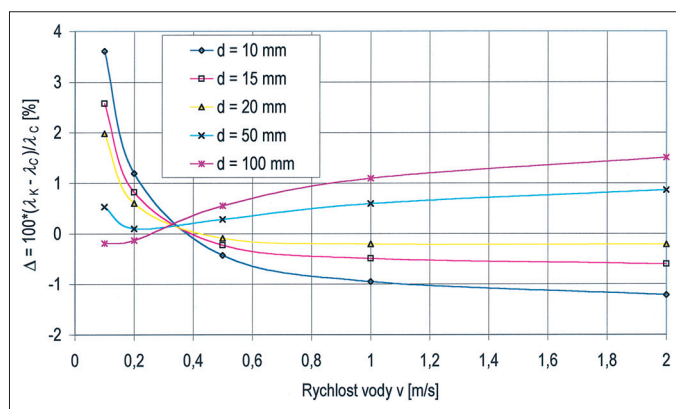
$$\text{Re} \geq 560 d/\epsilon \quad (7)$$

Uvedené používané vztahy (2) a (3) byly porovnány s Colebrookovým. Byly stanoveny odchylky

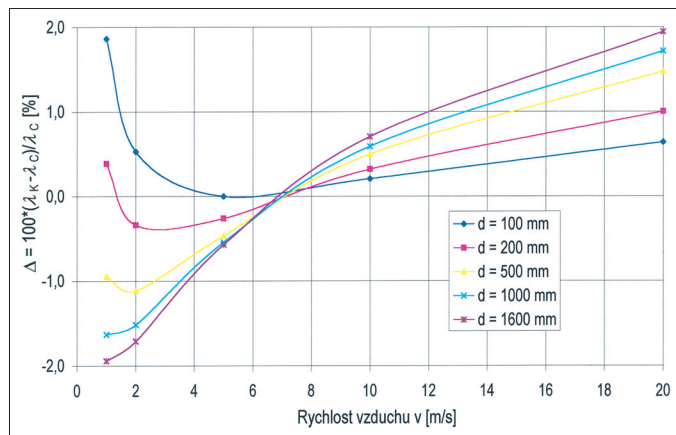
$$\Delta = 100 \cdot \frac{\lambda_x - \lambda_c}{\lambda_c} [\%]$$

pro zvolené rozsahy průměrů a rychlostí vody ($80 \text{ }^\circ\text{C}$) a vzduchu ($20 \text{ }^\circ\text{C}$), uvedené v úvodu příspěvku. Jejich průběhy jsou v obr. 3 a 4 pro Kaganův vztah. Je zřejmé, že většinou nevybočují z rozsahu $\pm 2 \%$.

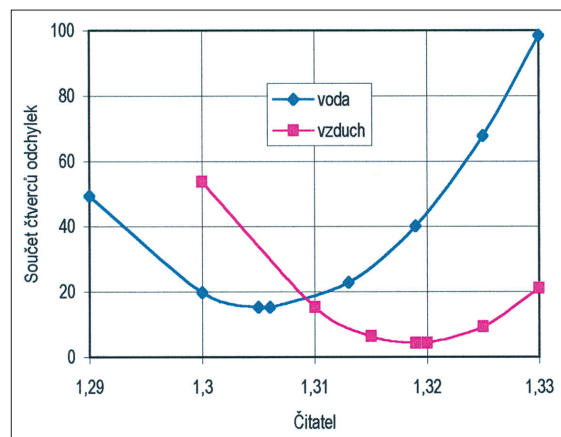
Ve zvoleném rozsahu proměnných byl ještě učiněn pokus o zpřesnění souladu Swameeho vztahu s Colebrookovým, vyhledáním nejvhodnější konstanty v čitateli. Byl vypočítán součet čtverců odchylek $\sum (\lambda_c - \lambda_s)^2$ při systematickém měnění hodnoty čitatele kolem 1,325. Výsledky v obr. 5 dokládají, že pro vodní rozvody se dosáhne největší shody s konstantou 1,306 a pro vzduchovody



Obr. 3 Odchylky součinitele tření podle Kagana a podle Colebrooka – rozvody vody



Obr. 4 Odchylky součinitele tření podle Kagana a podle Colebrooka – rozvody vzduchu



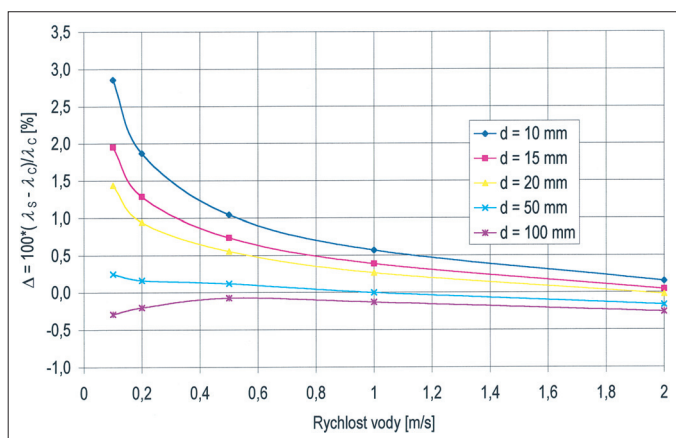
Obr. 5 Součet čtverců odchylek součinitele třecích ztrát podle vztahu Swameeho a Colebrooka při změnách hodnoty čitatele v rov. (3)

s hodnotou 1,318. V obr. 6 a 7 jsou výsledky pro upravený Swameeho vztah, odchylky jsou většinou do $\pm 1 \%$.

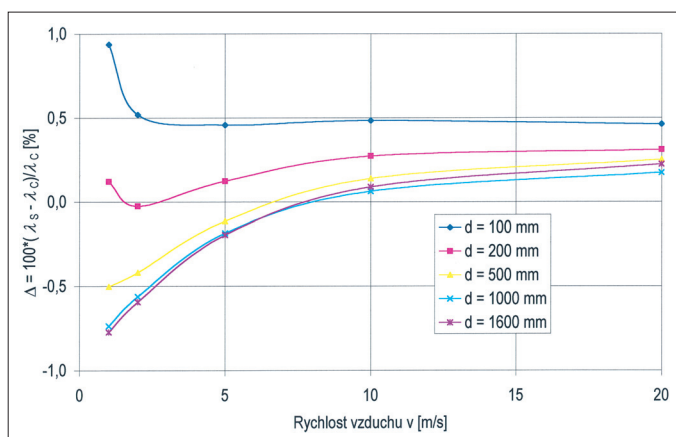
Tyto výsledky lze považovat za reprezentativní – i když shoda vypočtených hodnot s experimentálně zjištěnými by byla především závislá na hodnotě drsnosti stěn použité ve výpočtu.

Poznámka k drsnosti stěn

Hodnota $\epsilon = 0,15 \text{ mm}$ byla převzata pro vzduchovody s původní definicí: přírubového typu s počtem 10 spojů na délce 12 m – tedy s předpokládanými nepřesnostmi (přesazeními) v místech přírub, které jsou místními tlakovými ztrá-



Obr. 6 Odchylky součinitele tření podle Swameeho a podle Colebrooka – rozvody vody, číselník 1,306



Obr. 7 Odchylky součinitele tření podle Swameeho a podle Colebrooka – rozvody vzduchu, číselník 1,319

tami. Proto snaha ověřit platnost této hodnoty u „dokonale“ vyrobených a spojených vzduchovodů byly neúspěšné. Ověřené údaje o drsnosti vzduchovodů, vyrobených různou technologií (spiro, flexo, s R-přírubovými spoji), může poskytnout dosažení hodnot λ , stanovených z naměřených tlakových ztrát, do Colebrookova vztahu

$$\varepsilon = 3,71 \cdot \left[10^{\left(\frac{-1}{2\sqrt{\lambda}}\right)} - \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right] \cdot d \quad (8)$$

Hodnota $\varepsilon = 0,1$ mm pro trubky vodních rozvodů se po určité době provozu většinou zvětší vlivem usazených nečistot. Vrstva nánosu má však ještě výraznější vliv na ztráty třením než zvýšení ε , neboť při stejném průtoku jsou tlakové ztráty nepřímo úměrné páté mocnině průměru!

Závěr

Pro praxi je možné na základě uvedeného rozboru doporučit pro výpočet součinitele třecích ztrát vztah (3), který navrhl Swamee s použitím konstanty v číselníku 1,306 pro vodní a 1,319 pro vzduchové rozvody. Odchylky vypočtených hodnot od Colebrookových jsou s těmito konstantami nejmenší v prakticky používaném rozsahu ve vytápěcích a větracích zařízeních.

Kontakt na autora: hemzal@fsid.cvut.cz

Poznámka recenzenta

Velmi hodnotné výsledky porovnání hodnot součinitele tření stanovených implicitním a explicitním postupem doporučuji dále dopracovat na tabulární nebo nomografické vy-

jádření součinitele tření λ v závislosti na rozsazích průměru a poměrných drsnostech uvedených v článku odděleně pro vodu a vzduch.

Ing. Zdeněk Lerl

Použité zdroje:

- [1] CHYSKÝ, J., HEMZAL, K. a kol.: *Větrání a klimatizace*. Technický průvodce 31, Bolit Press 1993, Brno
- [2] SWAMEE, P. K. and JAIN, A. K.: *Explicit Equation for Pipe-Flow Problems*, Proc. A.S.C.E. J. Hydraul. Div. 102, HY5, pp. 657-664. (May 1976)
- [3] ASHRAE Fundamentals Handbook, 1997
- [4] SMOLÍK, J.: *Kritika výpočtu tlakových ztrát ve vzduchových potrubích*. ZTV 2 (1959) č. 6, s. 264–268
- [5] HEMZAL, K.: *Aerodynamika větrání*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2002
- [6] CHYSKÝ, J., OPPL, L. a kol.: *Větrání a klimatizace*. Technický průvodce 31, SNTL 1973, Praha, s. 120, 121
- [7] KAGAN, L. N.: *Novaja formula koeficienta gidravličeskogo soprotivlenija trenija*. In Otoplenije, ventiljacija i strojitel'naja tehnika. Minsk 1971, s. 119–125
- [8] MOODY, L. F.: *Friction Factors for Pipe Flow*, ASME Transactions, Vol. 66, 1944, p. 675
- [9] COLEBROOK, C. F.: *Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws*, Journ. Ins. Civil Engrs, London, No. 4, Feb. 1939, p. 133
- [10] NIKURADZE, J.: *Strömungsgesetze in rauhen Röhren*, VDI, Forschungsheft No. 361, 1933
- [11] MURIN, G. A.: *Gidravličeskije soprotivlenije truboprovodov*. Izd. VTI, No. 10, 1948

* Další cena pro prof. Fangera

Při mezinárodní konferenci o Eko-energii v Baku/Azerbajdžan byl celosvětově známý Prof. Dr. Ole Fanger (68) vyznamenán zlatou medailí od dánské technické univerzity za svoje celoživotní vědecké dílo v klimatizační technice a ve výzkumu pohody prostředí. Podle údajů svého institutu dostal prof. Fanger dosud více než 50 různých uznání z 23 států.

CCI 10/2002

(Ku)

Přední evropský výrobce PEX trubek

QUALITY PLASTICS LTD

Hledá pro český trh agenty pro distribuci svých výrobků v oblasti stavebního trhu, instalatérských potřeb a vytápění

Zájemce prosíme o písemnou odpověď v anglickém jazyce na adresu:

Mr. Ronan LE LU
Quality Plastic Ltd.
P. O. Box 29
White's Cross, Cork, Ireland