

Ing. Dana BERKOVÁ  
 ČVUT v Praze, Fakulta strojní  
 Ústav techniky prostředí

# Součinitel tření při proudění tekutin – komparace vztahů – II.



Ústav techniky prostředí

## Coefficient of friction under fluid flow – comparison of relations – II

Recenzent  
 Ing. Zdeněk Lerl

Při dimenzování potrubních sítí je nejčastěji potřebné stanovit součinitel třecích ztrát a to pro každý úsek třeba i vícekrát. V rozvodech vody a vzduchu zařízení techniky prostředí je proudění v oblasti přechodné, kde tento součinitel  $\lambda$  závisí na Reynoldsově čísle a poměrné drsnosti. Za nejpřesnější je považován implicitní vztah Colebrookův–Whiteův, který vyžaduje iterační postup. Pro technickou praxi byla proto navržena řada přibližných vztahů, které však udávají výsledky často značně rozdílné. Příspěvek přináší porovnání součinitele  $\lambda$ , založené na stanovení odchylek.

**Klíčová slova:** proudění tekutin, tlakové ztráty třením, součinitel třecích ztrát, potrubí

For design of pipe and duct dimension is most frequently used friction factor – for each section more times. Inside water pipes and air ducts HVAC installation are flow conditions in transition field, where friction factors are presented in terms of Reynolds number and relative roughness. As most accurate is used implicit Colebrook-White equation, for its solution is necessary iterative procedure. For technical application has been adopted number of easier to use equations, which results are many times very different. The contribution deals with comparison of the friction factor based on calculation deviation.

**Key words:** fluid flow, friction pressure losses, friction factor, duct

Příspěvek navazuje na příspěvek s názvem: „Součinitel tření při proudění tekutin – komparace vztahů“ uvedený v časopise VVI 1/2003 [2].

Vnitřní struktura proudění vody a vzduchu – nejčastěji používaných tekutin v technice prostředí – je v drtivé většině aplikací turbulentní [4]. Rozsah proudění vzduchu ve vzduchotechnických rozvodech je vymezen průměry 100 až 1600 mm, rychlostmi 1 až 25 m/s. Při běžných drsnostech je v tomto rozsahu proudění vždy v přechodné turbulentní oblasti proudění, kde součinitel třecích ztrát  $\lambda = f(Re, \varepsilon/d)$ , je zde závislý jak na velikosti Reynoldsova čísla  $Re = w \cdot d/\nu$  tak na poměrné drsnosti  $\varepsilon/d$ . Také proudění vody v rozvodech o průměru 10 až 100 mm při rychlostech 0,1 až 2 m/s a běžné drsnosti je v této oblasti. Turbulentní přechodná oblast je vymezena prouděním v potrubí s hladkými stěnami, kde  $\varepsilon \approx 0$  a oblastí, kde  $\lambda = f(Re, \varepsilon/d)$ , tedy nezávislý na  $Re$  (tzv. kvadratická oblast).

Za nejpřesnější se považuje historicky první analytické vyjádření této závislosti Colebrook–Whiteovým vztahem (1939) [1], který aproximoval výsledky experimentů s uměle zdrsňeným povrchem trub pískem (Nikuradze [6]) na trouby s drsností danou výrobním postupem, které podrobil Colebrookovému zkoumání. Bohužel tento vztah udává součinitel tření implicitně

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon/d}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (1)$$

a vyjádření  $\lambda$  je možné jen iterací. Protože výpočet při dimenzování sítí je nutné opakovat nejméně tolikrát, kolik má distribuční síť úseků, byl výpočet v době před hromadným rozšířením osobních počítačů prakticky nemožný. Proto byly k praktickým výpočtům navrženy zjednodušené vztahy, které umožní výpočet součinitele tření explicitně, většinou však s omezeným rozsahem platnosti a pouze přibližně.

K porovnání byla použita rovnice podle Churchila [3]

$$\lambda = 8 \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{1,5}} \right]^{1/12}, \quad (2)$$

$$A = \left[ 2,457 \ln \left( \frac{1}{\left( \frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \frac{\varepsilon}{d}} \right) \right]^{16} \quad B = \left( \frac{37530}{Re} \right)^{16}$$

kteřá je však platná pouze pro  $Re > 4000$ , a upravený vztah podle Swameeho [7]

$$\lambda = \frac{K}{\left[ \ln \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot d} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}, \quad (3)$$

kde doporučené konstanty podle Hemzala [2] jsou  $K = 1,306$  pro vodní rozvody a  $K = 1,319$  pro vzduchovody.

Jak je zřejmé z obr. 1 a 2, proudění ve vodních a ve vzduchových rozvodech je od představy hladkých stěn většinou značně vzdálené. Plně kvadratická oblast nastává (podle Moodyho [5]) při

$$Re \geq 560 \frac{d}{\varepsilon}$$

Uvedené vztahy byly porovnány s Churchillovým. Byly stanoveny odchylky

$$\Delta = 100 \cdot \frac{\lambda_x - \lambda_{ch}}{\lambda_{ch}} [\%]$$

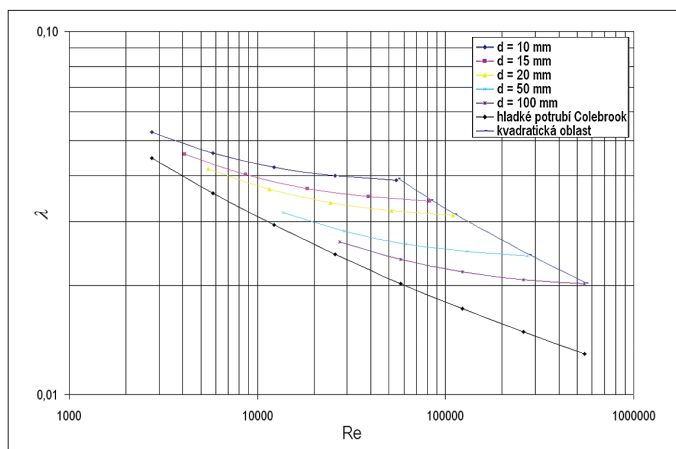
pro zvolené rozsahy průměrů a rychlostí vody (80 °C) a vzduchu (20 °C), uvedené v úvodu příspěvku. Jejich průběhy jsou v obr. 3 a 4 (porovnání Colebrooka a Churchila) a v obr. 5 a 6 (porovnání Swameeho a Churchila).

### Poznámka k drsnosti stěn

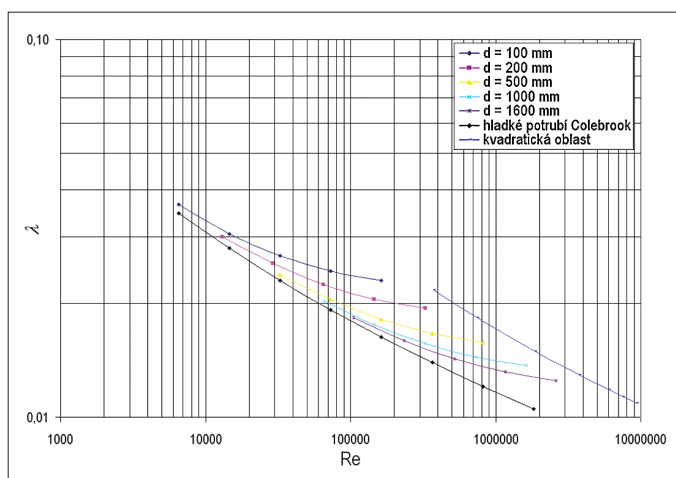
Hodnota  $\varepsilon = 0,15$  mm byla převzata pro vzduchovody s původní definicí: přírubového typu s počtem 10 spojů na délce 12 m – tedy s předpokládanými nepřesnostmi (přesazeními) v místech přírub, které jsou místními tlakovými ztrátami. Proto snaha ověřit platnost této hodnoty u „dokonale“ vyrobených a spojených vzduchovodů byly neúspěšné. Ověřené údaje o drsnosti vzduchovodů, vyrobených různou technologií (spiro, flexo, s R – přírubovými spoji), může poskytnout dosazení hodnot  $\lambda$ , stanovených z naměřených tlakových ztrát, do Colebrookova vztahu

$$\varepsilon = 3,71 \cdot \left[ 10^{\left( \frac{-1}{2\sqrt{\lambda}} \right)} - \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right] \cdot d$$

Hodnota  $\varepsilon = 0,1$  mm pro trubky vodních rozvodů se po určité době provozu většinou zvětší vlivem usazených nečistot. Vrstva nánosů má však ještě výraznější vliv na ztráty třením než zvýšení  $\varepsilon$ , neboť při stejném průtoku jsou tlakové ztráty nepřímě úměrné páté mocnině průměru [2].



Obr. 1 Průběhy závislosti součinitele třecích ztrát na  $Re$  a  $\varepsilon/d$  ve vodních rozvodech ( $\varepsilon = 0,1 \text{ mm}$ ,  $80 \text{ }^\circ\text{C}$ )



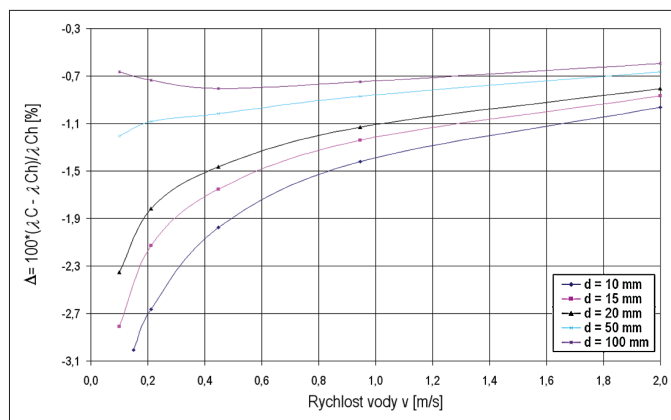
Obr. 2 Průběhy závislosti součinitele třecích ztrát na  $Re$  a  $\varepsilon/d$  ve vzduchovodech ( $\varepsilon = 0,15 \text{ mm}$ ,  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ )

## Závěr

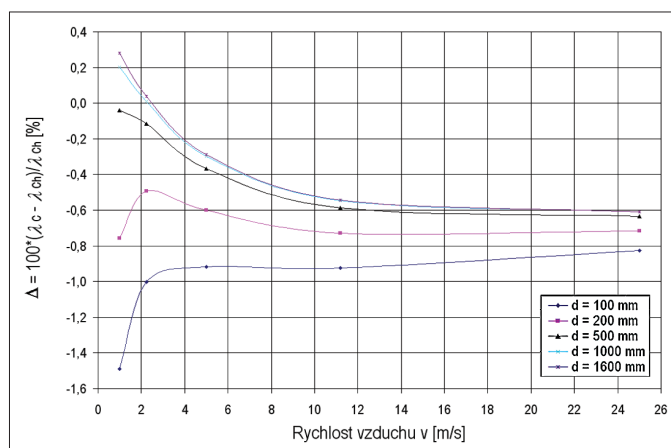
Při porovnání vztahů pro výpočet třecích ztrát ve vzduchovodech a rozvodech vody byly zjištěny odchylky do výše 3 % mezi výsledky podle Colebrooka a Churchila a 2 % při porovnání Swameeho a Churchila. Součinitel třecích ztrát podle Churchila byl ve všech případech větší než vypočtený podle porovnávaných vztahů. Pro praxi je možné, na základě uvedeného rozboru, doporučit pro výpočet součinitele třecích ztrát všechny uvedené vztahy. Respektovat je nutné mez  $Re > 4000$  pro platnost vztahu podle Churchila. Vhodné je vybrat ten nejjednodušší.

## Použité zdroje:

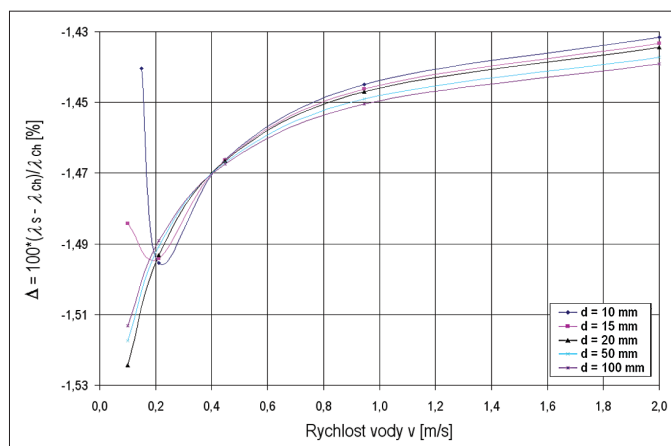
- [1] Colebrook, C. F. Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws. *Journ. Ins. Civil Engrs*, London, No. 4, Feb. 1939, p. 133
- [2] Hemzal, K. Součinitel tření při proudění tekutin – komparace vztahů. *Vytápění, větrání, instalace*, 12, č. 1, Praha 2003, str. 30-32
- [3] Churchill, S.W. Friction-factor equation spans all fluid flow regimes. *Chemical Engineering*, 84, 24, 1977, p.91-92
- [4] Chyský, J., Hemzal, K. a kol. *Větrání a klimatizace. Technický průvodce 31*, Bolit Press 1993, Brno
- [5] Moody, L. F. Friction Factors for Pipe Flow. *ASME Transactions*, Vol. 66, 1944, p. 675
- [6] Nikuradze, J. Strömungsgesetze in rauhen Röhren. *Vdi, Forschungsheft* No. 361, 1933
- [7] Swamee, P. K., Jain, A. K. Explicit Equation for Pipe-Flow Problems, *Proc. A.S.C.E. J. Hydraul. Div.* 102, HY5, 1976, p. 657-664. ■



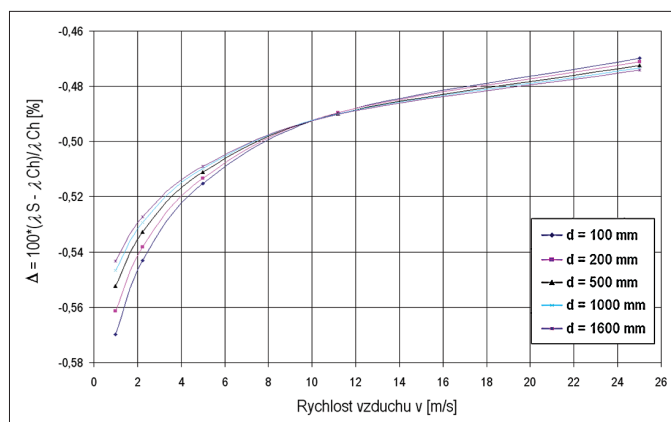
Obr. 3 Odchylky součinitele tření podle Colebrooka a podle Churchila – rozvochy vody



Obr. 4 Odchylky součinitele tření podle Colebrooka a podle Churchila – rozvochy vzduchu



Obr. 5 Odchylky součinitele tření podle Swameeho a podle Churchila – rozvochy vody



Obr. 6 Odchylky součinitele tření podle Swameeho a podle Churchila – rozvochy vzduchu